

Exercícios de Teorema de Gauss e Teorema de Stokes - Avançado

Professor: Gabriel Miranda

Resumo

Exercício 1: Seja $F(x, y, z) = x^2zi + xy^2j + z^2k$ onde C é a curva de interseção de $x + y + z = 1$ com $x^2 + y^2 = 9$ (anti-horário, visto de cima)

Solução

O Plano gerado com a interseção, será uma elipse

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \rightarrow \text{normal da elipse}$$

$$\text{rot}(F) \cdot n = \frac{1}{\sqrt{3}}(x^2 + y^2)$$

$$\int_C F dr = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}(x^2 + y^2) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (x^2 + y^2) dx \cdot dy = \frac{81\pi}{2}$$

Exercício 2: Seja $F = r|r|$ onde $r = xi + yi + zk$ onde S consiste no hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e no disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano xy

Solução

$$F(x, y, z) = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}i + y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}j + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}k$$

$$\text{div } F = 4\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\iint_S F dS = \iiint_E 4\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 4\sqrt{\rho^2} \cdot \rho^2 \cdot \sin \phi d\rho \cdot d\theta \cdot d\phi = 2\pi$$

Exercício 3: Seja $F(x, y, z) = e^y \tan z i + y\sqrt{3 - x^2}j + x \sin y k$ onde S é a superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície $z = 2 - x^4 - y^4$; $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$

Solução

$$\iint_S F dS = \iiint_E \sqrt{3 - x^2} dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{2-x^4-y^4} \sqrt{3 - x^2} dz \cdot dy \cdot dx = \frac{341}{60}\sqrt{2} + \frac{81}{20}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Exercício 4: Prove que o teorema de Stokes é verdadeiro para $F(x, y, z) = yi + zj + xk$ onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$ orientado na direção do eixo positivo y

Solução

I)

$$r(t) = \cos t \, i - \sin t \, k$$

$$r'(t) = -\sin t \, i - \cos t \, k$$

$$F(r(t)) = -\sin t \, j + \cos t \, k, F(r(t)) \cdot r'(t) = -\cos^2 t$$

$$\int F \, dr = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t) \, dt = -\pi$$

II)

$$\iint_S \text{rot}(F) \, dS = \iint \text{rot}(F) (r_\phi r_\theta) \, dA = \int_0^\pi \int_0^\pi (-\sin^2 \phi \cos \theta - \sin^2 \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \phi) \, d\theta \cdot d\phi = -\pi$$